Unidad II: Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior.

2.1 Teoría preliminaR

2.1.1 Definición de ED de orden n

Los nombres de la ecuación diferencial se colocan de forma muy significativa. Como su nombre lo indica, una ecuación diferencial de primer orden es aquella que consiste en un diferencial de primer orden, esto es, y’ o (dy/dx). Del mismo modo, una ecuación diferencial de segundo orden consiste en un diferencial de segundo orden. Un concepto similar se puede extender para definir la ecuación diferencial de orden n.

Esto es, una ecuación diferencial de orden n es aquella que consiste en un diferencial de orden enésimo. Un diferencial de orden enésimo es del tipo y(n) o (dny/ dxn).Una ecuación diferencial general de orden enésimopuede representarse como,

$$f_n(x)y^{(n)}+f_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+f_1(x)y'$$

Muchos de los problemas matemáticos en el campo de la física, ingeniería, etc.pueden ser modelados con la ayuda de la ecuación diferencial de enésimo orden. Por ejemplo, sea un sistema de resortes y masa m. La constante elástica del resorte sea k. entonces el sistema mecánico que representa este sistema para la fuerza de restauradora del resorte es,

$$mx''(t)cx'(t)+kx(t)=g(t)$$

En la ecuación anterior, g(t) representa las fuerzas externas y, la fuerza de amortiguación es directamente proporcional a la velocidad del sistema. Sea la posición inicial x(t0) en el tiempo t0. Entonces, la velocidad inicial puede ser determinarse, esto es, x'(t0). Por lo tanto, al resolver el diferencial de segundo orden, obtenemos el problema de valor inicial,

$$x''(t) = f(t, x(t), x'(t))$$

$$x(t_0) = x_0$$

$$x'(t_0) = y_{0l}$$

El orden de la ecuación diferencial de enésimo orden es n. Esto es, el orden de la ecuación diferencial es igual al orden del mayor diferencial que aparece en la ecuación diferencial dada. Como se mencionó anteriormente, el concepto de una ecuación diferencial de orden n es una extensión de la ecuación diferencial deprimer o segundo orden. Esto implica que es posible implementarlos resultados formulados para la ecuación diferencial de primer y segundo orden se pueden también fácilmente para la ecuación diferencial de enésimo orden. Algunos de estos resultados se discuten a continuación:

1. Si en la ecuación de mayor diferencial de la función conocida, esto es, Q(x) y los coeficientes de la función desconocida, es decir, f0(x), f1(x), f2(x) … fn-1(x) son definidos para alguna variable x en algún par de intervalos cerrados de forma continua, es decir, ninguna de la funciones resulta cero en cualquier punto dentro del intervalo dado, entonces por cada punto en ese intervalo y para todas las constantes c0, c1, c2 … cn-1 tenemos una función única que puede satisfacer los pre-requisitos iniciales dados como,

$$
\begin{aligned}
&y(x_0) = y_0 \\
&y'(x_0) = y_1 \\
&\vdots \\
&y^{n-1}(x_0) = y_{n-1}
\end{aligned}
$$

2. La transformación lineal de la ecuación diferencial de orden enésimo puede representarse como,

$$L(c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n) = c_1 L(y_1) + c$$

Extendiendo el resultado anterior, si tenemos y1, y2, y3 …, yn como las soluciones a la ecuación L(y) = 0, entonces puede existir más de una solución a esa ecuación, la cual puede representarse como,

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n$$

La transformación lineal de una ecuación diferencial de orden enésimo tiene n soluciones linealmente independientes. 3. El wronskiano de las funciones diferenciables puede ser dado por,

$$W(y_1, y_2, \cdots y_n) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1} \end{pmatrix}$$

4. La solución general de una ecuación diferencial de orden n se puede dar como,

$$y = y_c + y_p$$

2.1.2 Problemas de valor inicial

Problemas de Valor Inicial

Un problema de valor inicial puede ser considerado como una ecuación diferencial que está sujeta a algunospre-requisitos iniciales o condiciones iniciales que ayudan en la determinación de una solución particular para la ecuación diferencial dada. Las condiciones iniciales son expresadas en términos de la función indefinida dada en la ecuación diferencial.

Matemáticamente, un problema de valor inicial es una ecuación diferencial ordinaria como,

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

Teniendo en cuenta que,

$$f : \Omega \subset R X R^n \to \ R^n$$

En la ecuación anterior, es un intervalo abierto, el cual tiene un punto dentro del dominio de la ecuación diferencial dada. Por tanto, el pre-requisito inicial puede ser dado como,

$$(t_0, y_0) \in \Omega$$

La solución del problema de valor inicial es también la solución de la ecuación diferencial junto con la cual está dada. Además, la solución debería satisfacer la condición,

$$y(t_0) = y_0$$

El concepto de problemas de valor inicial puede ampliarse fácilmente para las ecuaciones diferenciales de enésimoorden. Para las ecuaciones diferenciales de enésimo orden, tenemos una ecuación diferencial de enésimo orden y junto con estason establecidospre-requisitos n iniciales.

Entre estos pre-requisitos n iniciales, uno es dado para la función indefinida misma, la cual es dada en la ecuación diferencial y el resto de las condiciones(n - 1) son establecidas para los diferenciales de la función indefinida hasta (n - 1) º orden. También es esencial que el diferencial enésimo de la función indefinida no sea igual a cero en la ecuación diferencial dada.

Un problema de valor inicial para una ecuación diferencial de orden superior puede ser dada como,

$$y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), y^{(2)}(t), \cdots, y^{(n-1)}($$

Dadas las condiciones iniciales tenemos que,

$$y(a) = y_0$$

$$y'(a) = y'_0$$

$$y^{(2)}(a) = y_0^{(2)}$$

$$\vdots$$

$$y^{(n-1)}(a) = y_0^{(n-1)}$$

Un punto digno de mención es que todos los pre-requisitos iniciales sonestablecidos con respecto a un punto, este es a, sin el cual no es posible resolver el problema de valor inicial. También es irrelevante si la ecuación diferencial es una ecuación diferencial homogénea de orden superior o una ecuación diferencial no homogénea de orden superior, todavía es posible establecer un problema de valor inicial.

Un problema de valor inicial también puede ser modificado de manera talque se convierta en un problema de valor de contorno. En un problema de contorno se nos dan n condiciones de una ecuación diferencial de orden enésima de manera talque cada una de las condiciones nos dan el valor de la función indefinida en n puntos diferentes para el intervalo par cerrado I, para el cual la ecuación diferencial dada está definida.

Con la ayuda de estas condiciones n iniciales tenemos que obtener el valor de la función en algún punto (n + 1)esimoque también se encuentra dentro de ese intervalopar cerrado.

Tal problema puede ser descrito como,

$$
\begin{aligned}
&y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), y^{(2)}(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)) \\
&y(a) = y_0 \\
&y(b) = y_1 \\
&y(c) = y_2 \\
&\vdots \\
&y(n) = y_{n-1}
\end{aligned}
$$

Al final, un ejemplo ilustrativo como el que indicado a continuación sería de mucha ayuda.

y’’+ y = 0, dadas las condiciones iniciales que,

y(0) = 2

y’(0) = 3

El primer paso para resolver el problema planteado es la construcción de una ecuación auxiliar que pueda ser sustituida por la ecuación diferencial dada, por lo tanto, la ecuación auxiliar para el problema anterior dadopuede ser,

r2 + 1 = 0 o,

r2 = 1

Al resolver la ecuación anterior obtenemos las raíces de la ecuación como, i. Por lo tanto, el valor de = 0 y el valor de = 1. Esto nos da la solución de la ecuación diferencial, y(x) = c1¬cos(x) + c¬2¬sin(x)

Esto nos da,

y’(x) = -c1¬ sin(x) + c¬2¬cos(x)

Usando las condiciones iniciales tenemos que el valor de c¬1 ¬= 2 y el valor de c¬2¬ = 3.

Por lo tanto, la solución es,

y(x) = 2cos(x) + c¬3sin(x)

2.1.3 Teorema de existencia y unicidad de solución única

eorema de existencia y unicidad de una solución única

Sea una ecuación diferencial de enésimo orden definida como,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n-1)}\right)$$

Y esta satisface el pre-requisito inicial establecido como,

$$\begin{aligned} y(x_0) &= a_0 \\ y'(x_0) &= a_1 \\ y''(x_0) &= a_2 \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= a_{(n-1)} \end{aligned}$$

Ahora, imagina que la función que define la ecuación diferencial de enésimo orden, es decir, f, es una función continua, cuyos argumentos, x, y, y’, y’’ … yn-1se encuentran en una región R tal que tenemos ecuaciones definiendo la región R como,

| x – x¬0¬ | k¬0 | y – a0¬ | k¬1 | y’ – a1 | k¬2 | y’’ – a2¬ | k¬3 | yn-1 – an-1¬ | k¬n

También asume que la función f satisface una condición Lipschtizestablecida como,

| f(x, y¬1, y¬1’, y¬1’’ … y¬¬1n-1) - f(x, y¬2, y¬¬¬2’, y¬¬2’’ … y¬¬2n-1) | N(| y¬1 ¬– y¬2¬ | + | y¬1¬’¬– y¬2¬’ | + | y¬1¬’’¬– y¬2¬’’ | + … + | y¬1¬n-1 ¬– y¬2¬n-1 |)

En la condición anteriormente expuesta, los puntos(x, y¬1, y¬1’, y¬1’’ … y¬¬1n-1) y (x, y¬2, y¬¬¬2’, y¬¬2’’ … y¬¬2n-1) son dos puntos que se encuentran en la misma región dada R.

Si las condiciones anteriores se cumplen, entonces podemos concluir que debe existir un intervalo I, de modo tal que tenemos una función continua única en dicho intervalo, sea y(x), cuyo diferencial continuo de orden enésimo satisface cada uno de los pre-requisitos iniciales establecidos arriba.

La prueba del teorema anterior se da a continuación.

Comenzamos con la premisa de que una función y(x) es la solución de la ecuación diferencial dada. Ahora definimos algunas funciones, seay¬1¬(x), y¬2¬(x), y¬3¬(x) …y¬n(x) usando las relaciones siguientes,

y(x) = y¬1¬(x)

y’(x) = y¬’1¬(x) = y¬2¬(x)

y’’(x) = y¬’’1¬(x) = y¬’2¬(x) = y¬3(x)

y’’’(x) = y¬’’’1¬(x) = y¬’’2¬(x) = y¬’3(x) = y¬4(x)

yn-1(x) = y¬2n-1(x) = y¬2n-2(x) = y¬3n-3(x) = … = y¬n-1¬’(x) = y¬n¬(x) (i)

Ahora, diferencia la última ecuación a partir del conjunto de ecuaciones que figuran arriba. Tenemos que,

yn(x) = y¬1n(x) = y¬2n-1(x) = y¬3n-2(x) = … = y¬n-1¬’’(x) = y¬n¬‘(x)

Mediante el uso de la ecuación de diferencialesanterior podemos reescribir la ecuación de la función como,

y¬n¬’(x) = f(x, y, y’, y’’ … yn-1)

2.1.4 EDL homogéneas

Ecuaciones Diferenciales Lineales Homogéneas

Las ecuaciones diferenciales juegan un papel destacado en diversas disciplinas tales como ingeniería, física y economía. Una ecuación diferencial es una ecuación matemática de una función indeterminada de una o varias variables relacionada con los valores de la función en sí misma y con sus derivados de varios órdenes. Las ecuaciones diferenciales se clasifican en dos partes de la siguiente manera: -

1. Ecuaciones diferenciales parciales (EDP)

Se dice que una ecuación diferencial es una ecuación diferencial parcial cuando la función desconocida es función de varias variables independientes y la ecuación implica sus derivadas parciales.

2. Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO)

Se dice que una ecuación diferencial es una ecuación diferencial ordinariacuando la función desconocida esfunción de una sola variable independiente. En la forma más simple, la función desconocida es una función valorada real o compleja.

Dependiendo de la naturaleza de las ecuaciones diferenciales estas pueden llamarse homogéneas o no homogéneas. Una ecuación diferencial lineal homogénea es simplemente una ecuación en la cual ambos coeficientes de las diferenciales dy y dt son homogéneos, y las ecuaciones no homogéneas son sencillamente una ecuación en la cual ambos coeficientes de las diferenciales dy y dt no son homogéneas.

(d/ dt) y(t) + a(t) y(t) = 0 (Ecuación diferencial lineal homogénea)

(dy/dx) xy = x3 sin (x) (Ecuación diferencial lineal no homogénea)

La ecuación escrita arriba es llamada una ecuación diferencial lineal homogéneade primer orden. Se dice que es homogénea, porque después de colocar todos los términos que contienen la ecuación desconocida y sus derivados en el lado izquierdo, el lado derecho es igual a cero para todo t. Es lineal, porque y(t) y su derivado parecen estar “solos”, es decir, no son componentes de una función compuesta. En la expresión anterior a(t) representa una función continua autoritaria de t, yesta podría ser sólo una constante que se multiplica por y(t); en tal caso piensa en esta como una función constante de t. La ecuación anterior es una ecuación diferencial lineal homogénea, ya que no forma parte de una función compuesta como cos (y(t)), ey(t) etc.Cualquier ecuación diferencial que contenga términos como estos es llamada no lineal.

La ecuación anterior es de primer orden debido a que la mayor derivada de la función desconocida es su primera derivada. Una ecuación diferencial de segundo orden contendría términos como,

$$A\frac{d^2x}{dt^2}y+B\frac{dy}{dx}+Cx=D$$

Se dice que es de segundo orden debido a la derivada de orden más altopresente, lineal, porque ninguna de las derivadas está elevada a alguna potencia, y los multiplicadores de las derivadas son constantes.

Sin embargo, esta no es una ecuación homogénea, ya que consta de una función conocida en el lado derecho, es decir, D. Una forma general de la ecuación diferencial lineal homogénea sería,

$$A\frac{d^2x}{dt^2}y+B\frac{dy}{dx}+Cx=0$$

Del mismo modo, una ecuación diferencial lineal homogénea puede llegar hasta el enésimo orden.

Si asumimos que y¬1¬(x) e y¬2¬(x) son una de las soluciones de la ecuación diferencial linealhomogénea dada, la sumatoria de las dos, esto es, y3, x0 es también una de las soluciones de la ecuación diferencial dado que,

$$y_3(x)=y_1(x)+y_2(x)$$

Y la solución general de esta ecuación puede determinarse mediante el uso de la ecuación,

$$y(x)=Ae^{m_1x}+Be^{m_2x}$$

2.1.4.1 Principio de superposición

Principio de Superposición

El principio de superposición se ocupa principalmente de la ecuación diferencial lineal homogénea. El nombre de esta teoría se mantiene así por su similitud con el principio de superposición aplicado en física y otras áreas de la ciencia, en el cual se estudia; si existen dos estímulos en un sistema lineal, entonces el resultado neto de su fuerza en algún momento y en algún lugar será equivalente a la sumatoria de las fuerzas de estos dos estímulos tomados independientemente.

De manera similar, para una ecuación diferencial linealhomogénea, de cualquier orden (con o sin coeficientes constantes), el principio de superposición establece que, “Si tenemos y¬1¬(x) e y¬2¬(x) como el resultado de alguna ecuación diferencial lineal homogénea, entonces la sumatoria de estos resultados deberán producir una nueva ecuación, la cualpertenecerátambién al conjunto de resultados de la ecuación diferencial dada”. Esto puede denotarse como,

$$y_3(x) = y_1(x) + y_2(x)$$

Esto es verdadero porque sabemos por las propiedades de un sistema lineal que cualquier sistema lineal es de naturaleza aditiva. También tenemos una prueba del teorema mencionado anteriormente. Sea una ecuación diferencial lineal homogénea de la forma,

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0$$

2.1.5 Dependencia e independencia lineal, wronskiano.

En álgebra lineal, un conjunto de vectores es linealmente independiente si ninguno de ellos puede ser escrito con una combinación lineal de los restantes. Por ejemplo, en R3, los vectores (1, 0, 0), (0, 1, 0) y (0, 0, 1) son linealmente independientes, mientras que (2, −1, 1), (1, 0, 1) y (3, −1, 2) no lo son, ya que el tercero es la suma de los dos primeros.

Un conjunto de vectores de un espacio vectorial es linealmente independiente si Esta idea es importante porque los conjuntos de vectores que son linealmente indepedientes, generan un espacio vectorial y forman una base para dicho espacio. Entre las propiedades de los vectores linealmente dependientes e independientes encontramos: Un conjunto de vectores es linealmente dependiente si y solamente si alguno de los vectores es combinación lineal de los demás. Si un conjunto de vectores es linealmente independiente cualquier subconjunto suyo también lo es. Obviamente, si tenemos un conjunto de vectores tales que ninguno de ellos es combinación de los demás, escogiendo solamente unos cuantos, no podrán ser combinación de los otros. Si un conjunto de vectores es linealmente dependiente también lo es todo conjunto que lo contenga. Ya que un conjunto de vectores es linealmente dependiente si y solo si tiene algún vector que es combinación lineal de los demás, si metemos este conjunto de vectores en otro más grande, seguimos teniendo el vector que es combinación lineal de otros, por tanto, el conjunto más grande sigue siendo linealmente dependiente.

2.1.6 Solución general de las EDL homogénea

Un formato general para denotar una ecuación diferencial como una ecuación diferencial homogénea es el que se indica a continuación,

$$\left(\frac{\delta}{\delta_t}y(t)\right)+a(t)y(t)=0$$

El nombre se mantiene así porque si colocamos los términos que contienen la función indefinida y los diferenciales de la función indefinida en un lado de la ecuación diferencial, entonces el otro lado de la ecuación es igual a cero. Esto puede verse claramente en la ecuación dada más arriba. Porestemotivo, se le conocecomohomogénea.

La ecuación se llama lineal porque el diferencial de la función indefinida y la función indefinida en sí aparecen solos y no formando parte de alguna otra función compleja. Determinar la solución general de una ecuación diferencial lineal homogénea es una tarea bastante fácil que puede realizarse siguiendo unos pasossimples, uno tras otro. Es importante que entiendas el paso previo antes de pasar al siguiente para entender el procedimiento de solución de la ecuación diferencial homogénea lineal.

Iniciamos con la ecuación diferencial de la forma,

[(y(t))/ t] + a(t) y(t) = 0

Ahora mueve todos los términos que contiene la función indefinida en un lado y los términos que contienen los diferenciales de la función indefinida en el otro lado de la ecuación diferencial.

2.1.6.1 Reducción de orden de una EDL de orden dos a una de primer orden, construcción de una segunda solución a partir de otra ya conocida

Reducción del orden de una ecuación diferencial lineal de segundo orden a primer orden, construcción de una segunda solución a partir de otra ya conocida

Resolver una ecuación diferencial de orden enésimo puede ser, en ocasiones, un poco engañoso. En consecuencia, sería mucho mejor si tuviéramos una ecuación diferencial lineal de primer orden o un sistema de ecuaciones lineales diferenciales de primer orden para sustituir la ecuación diferencial de orden enésimo. Esto se puede hacer con la ayuda del método de reducción. Existen tres tipos específicos de ecuaciones diferenciales de segundo ordenque pueden ser reducidas a ecuaciones de primer orden: 1. Ecuación diferencial de segundo orden que no posea variable dependiente: Una ecuación diferencial de segundo orden cuya variable dependiente no existe es de la forma,

$y'' + y' = x$ o

$$xy'' - 2y' = 12x^2$$

En las ecuaciones de este tipo, la variable dependiente no aparece de forma explícita en cualquier lugarde la ecuación. Las ecuaciones de este tipo pueden ser transformadas en una ecuación diferencial de primer orden, haciendo sustituciones como,

$$y' = w$$

Esto implica que,

$$y'' = w'$$

2.2 Solución de EDL homogéneas de coeficientes constantes

Una ecuación diferencial lineal homogénea es de la forma,

$$f_n(x)y^{(n)} + f_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + f_1(x)y'$$

En general, estas ecuaciones donde los mismostérminos coeficientes son las funciones definidas para alguna variable, sea x, y que están libres de cualquier tipo de restricciones impuestas sobre ellas, carecen de una solución que puede ser expresada en términos de las funciones generales. Y en el caso de la función dada, esta es una excepción a la regla anterior, entonces es muy difícil reducirla a esa forma.

La dificultad anterior puede superarse cuando los términos coeficientes son constantes. Por lo tanto, la mayoría de las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas son de la forma,

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

La ecuación anterior es una ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes de orden enésimo. En esta ecuación, a¬1¬, a¬2¬, a¬3¬ …a¬n¬ son las constantes y el valor de a¬n¬no debería ser igual a cero.

Los siguientes son los pasos para resolver una ecuación diferencial lineal homogéneacon coeficientes constantes de orden enésimo.

1. Para la ecuación diferencial, encuentra la ecuación característica correcta. Por ejemplo, para la ecuación diferencial anterior dada, la ecuación característica puede darse como,

$$a_n r^{(n)} + a_{n-1} r^{(n-1)} + \cdots + a_1 r^1 + a_0 = 0$$

Ahora determina las raíces de la ecuación característica arriba. Las raíces de esta ecuación pueden ser de dos tipos simples y múltiples. Y a partir de estas nraíces, los resultados independientes de la ecuación diferencial pueden determinarse.

2. Caso de la raíz simple: Sea r un número real, entonces el resultado de la ecuación diferencial seráerx. Y si r es un número complejo de la forma , entonces tenemos una raíz para la ecuación como . Esto es porque los coeficientes de la ecuación característica son números reales. Esto nos da dos soluciones para la ecuación característicadada como, cos (x) y sin (x).

3. Caso de las raíces múltiples: Asumamos que r es la raíz de la ecuación característica dada cuya multiplicidad viene a ser m. Ahora, sea r un número real, entonces los resultados m independientes de la ecuación diferencial son dados como,

$$e^{rx}, x e^{rx}, \ldots, x^{s-1} e^{rx}$$

Y en el caso que r sea un número complejo de la forma , entonces tenemos una raíz de la ecuación . La multiplicidad de ambas raíces será igual que m. Por lo tanto, tenemos 2 resultados m independientes de la ecuación característicadada como,

cos (x), x cos (x) … xs-1 cos (x)

sin (x), x   sin (x) … xs-1 sin (x)

Ahora, con la ayuda de las propiedades generales de las ecuaciones polinómicas las soluciones nindependientes de la ecuación diferencial pueden ser determinadas. La ecuación para la determinación de la solución se da de la forma,

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n$$

Un ejemplo ilustrativo para revisar los pasos anteriores se da a continuación. y(4) + y = 0

Ecuación característica para la ecuación diferencial: r4 + 1 = 0

Las raíces de la ecuación están dadas como,

cos (/4, k /2) + i sin (/4, k /2)

La forma analítica de las raíces,

1 + i/ , 1 – i/ , −1 + i/ , −1 –i/

Entonces, las soluciones independientes estarán dadas como,

$$e^{x/\sqrt{2}} \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \quad y \quad e^{x/\sqrt{2}} \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) .$$

$$e^{-x/\sqrt{2}} \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \quad y \quad e^{-x/\sqrt{2}} \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) .$$

Y la solución general es,

$$y = c_1 e^{x/\sqrt{2}} \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + c_2 e^{x/\sqrt{2}} \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + c_3 e^{-x/\sqrt{2}} \cos\left(\right.$$

2.2.1 Ecuación característica para EDL de segundo orden (raíces reales y distintas, raíces reales e iguales, raíces complejas conjugadas)

Ecuación característica para una ecuación diferencial lineal de segundo orden (raíces reales y distintas, raíces reales e iguales, raíz del conjugado complejo)

Un formato informal para denotar una ecuación diferencial lineal homogénea es,

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

En la ecuación diferencial anterior, la función y es la función desconocida que define la variable x. Esta es una ecuación diferencial de segundo orden dado que el orden diferencial más alto en la ecuación es dos. Si el valor del coeficiente a¬2 se convierte en cero o el diferencial y’’ es cero, entonces nos quedamos con una ecuación diferencial lineal homogéneade primer orden.

Ahora, divide la ecuación anterior con a¬2¬, entonces tenemos,

y’’ + a¬1¬/ a¬2¬ y’ + a¬0¬/ a¬2¬ y = 0

Ahora, sustituye y = exp(x) en la ecuación anterior. Hacemos esto porque estamos encontrando una solución que envuelve un término exponencial. Esto es debido a que esta técnica nos da la solución en la mayoría de los casos. En consecuencia,nos deja con una ecuación de la forma,

2 + c¬1¬ +c¬0 = 0

En la ecuación anterior tenemos el valor de c¬1¬ = a¬1¬/ a¬2 y el valor dec¬0¬ = a¬0¬/ a¬2¬. Sabemos de antemano que el valor de no es igual a cero. Entonces podemos dividir toda la ecuación con este término. La ecuación transformada es,

2 + c¬1¬ +c¬0 = 0

La ecuación anterior es una ecuación algebraica que puede resolverse fácilmente para obtener la respuesta. Esta ecuación se denomina la ecuación característica de la ecuación diferencial, esto es, una ecuación que es de forma algebraica y que puede ser sustituida por una ecuación diferencial para obtener el resultado necesario de una manera conveniente. Si la ecuación anterior se resuelve entonces tenemos la raíz de la ecuacióncomo, y por tanto, demuestra nuestra sustitución.

2.3 Solución de las EDL no homogéneas

Un formato general para denotar una ecuación lineal diferencial no homogénea es,

$$a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + a_{n-2} y^{n-2} + \dots + a_1 y'$$

En la ecuación anterior, si la función en el lado derecho, que es g(x), se convierte en cero, entonces la ecuación se transforma en una ecuación diferencial lineal homogénea. Además, a¬n¬, a¬n-1¬, a¬n-2¬ … a¬1¬, a¬0¬ son términos constantes, por lo tanto, se trata de una ecuación diferencial lineal no homogénea con coeficientes constantes. También podemos colocar una función desconocida o el diferencial de esa función desconocida en lugar de una constante. Una ecuación de este tipo se conoce simplemente como una ecuación lineal diferencial no homogénea.

La correspondiente ecuación diferencial lineal homogénea es esencialmente necesaria para resolver la ecuación diferencial actual. Esta se denomina a veces la ecuación complementaria de la ecuación diferencial dada. Aunque existen varias técnicas para resolver una determinada ecuación diferenciallinealno homogénea, dos de las más importantes se discuten a continuación.

1. Técnica de los coeficientes indeterminados: Sea la ecuación diferencial de la forma,

$$ay'' + by' + cy = g(x)$$

En la ecuación anterior, g(x) es una función polinómica conocida. Entonces, podemos concluir que la solución particular de la ecuación diferencial debe ser tambiénuna función polinómica. Y que el grado de este polinomio es similar al de la función g(x) dado que ay'' + by' + cy también son términos polinómicos. Por lo tanto, razonablemente, podemos sustituir una función polinómica, del grado de la función f(x), en lugar de la solución particular de la ecuación diferencial y así obtener los valores de los coeficientes.

2.3.1 Método por coeficientes determinados

Este es un método para resolver ecuaciones lineales no homogéneas, éste sólo se aplica a una clase restringida de ecuaciones. No obstante, la ventaja consiste en que, cuando este método es el pertinente, por lo general es más fácil de emplear que los otros métodos.

$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = Q(x)$.........$(1)$

En primer lugar este método se aplica a ecuaciones del tipo:

donde las a_1 son constantes y $Q(x)$ es una función que se puede anular mediante la aplicación de un operador con coeficientes constantes. Así que, por ejemplo, no se puede emplear este método para resolver una ecuación de la forma (1), en el cual $Q(x) = \tan x$. Como preparación para el método de coeficientes indeterminados, reescribimos (1) en notación operacional:

$$\left(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_n\right)[y] = Q(x) \cdots\cdots\cdots (2)$$

Ahora estamos listos para establecer el procedimiento general. Por evidencia, hemos dividido este procedimiento en tres etapas.

Etapa I Para resolver la ecuación (2), comenzamos por encontrar un operador con coeficientes constantes que anule a $Q(x)$ (Si no existe dicho operador el método no se aplica). Se aplica el operador en ambos miembros de (2), obteniendo una ecuación lineal homogénea de orden más alto:

$$\left(b_0 D^k + \cdots + b_k\right)\left(a_0 D^n + \cdots + a_n\right)[y] = 0 \cdots\cdots\cdots (3)$$

2.3.2 Método de variación de parámetros

En matemáticas, la variación de los parámetros, también conocida como la variación de las constantes, es un método general para resolver las ecuaciones lineales diferenciales no homogénea. Fue desarrollado por Joseph Louis Lagrange.

Por orden primero las escuaciones lineales diferenciales no homogénea por lo general es posible encontrar soluciones a través de la integración de los factores o coeficientes indeterminados con menos esfuerzo considerable, aunque los métodos heurísticos de apalancamiento que implican adivinar no funcionan para todas las ecuaciones diferenciales lineales inhomogénea.

La variación de los parámetros se extiende a los lineales ecuaciones en derivadas parciales y, en concreto a los problemas no homogéneo de ecuaciones de evolución lineal como la ecuación del calor, ecuación de onda, y la placa vibratoria ecuación. En este contexto, el método es más a menudo se conoce como principio de Duhamel, el nombre de Jean-Marie Duhamel el primero que aplicó el método para resolver la ecuación del calor no homogénea. A veces la variación de los parámetros de sí mismo se llama el principio de Duhamel y viceversa.

2.4 Aplicaciones

Los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales encuentran sus aplicaciones en varios problemas que surgen en el sistema del mundo real. Algunos de estos problemas se discuten a continuación.